3) b) pour $n=0$; $U_0 = -1 < \sqrt{3}$ (vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n < \sqrt{3}$ et montrons que $U_{n+1} < \sqrt{3}$.

· $U_n < \sqrt{3} \Rightarrow 2 + U_n < 2 + \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+U_n} > \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2+U_n} < -\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{2+U_n} < 2 - \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

· $2 - \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2 - 2 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow U_{n+1} < \sqrt{3}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n < \sqrt{3}$

4°) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n + 3}{2+U_n} - U_n$

$$= \frac{2U_n + 3 - 2U_n - U_n^2}{2+U_n}$$